

**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 21.10.2022

Parte II - Testo 1

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $B$ ,  $M_B$ .

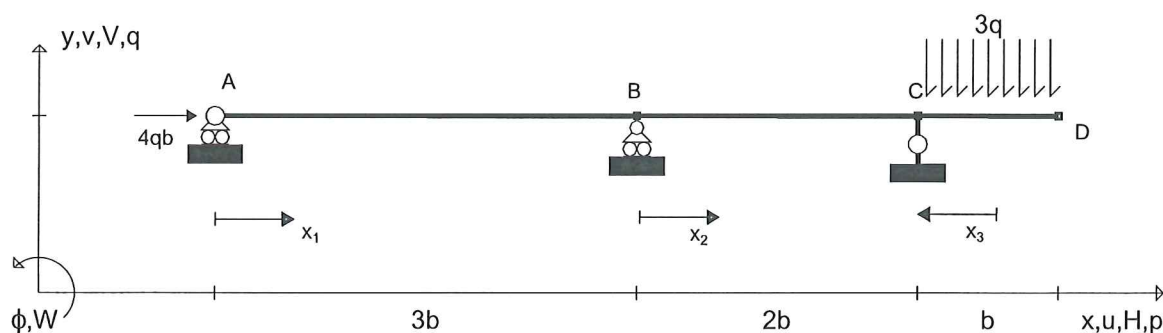
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto  $A$ ,  $\varphi_A$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 21.10.22\*001



EQ. DI CONGRENZA:

$$\Delta \varphi_B = 0$$

## Esercizio n. 2 (7 punti)

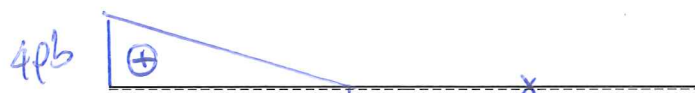
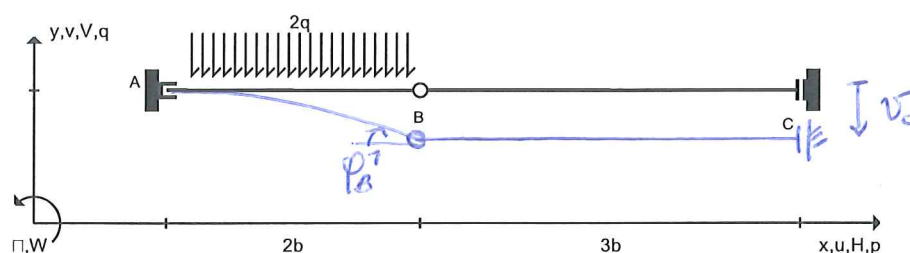
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

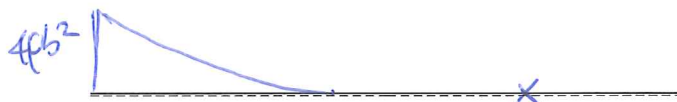
1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. La rotazione del punto B relativa al primo corpo,  $\varphi_B^{(1)}$ ;
4. Lo spostamento verticale del punto C,  $v_C$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 21.10.22\*001



$\uparrow (+) \downarrow$



$(+)$

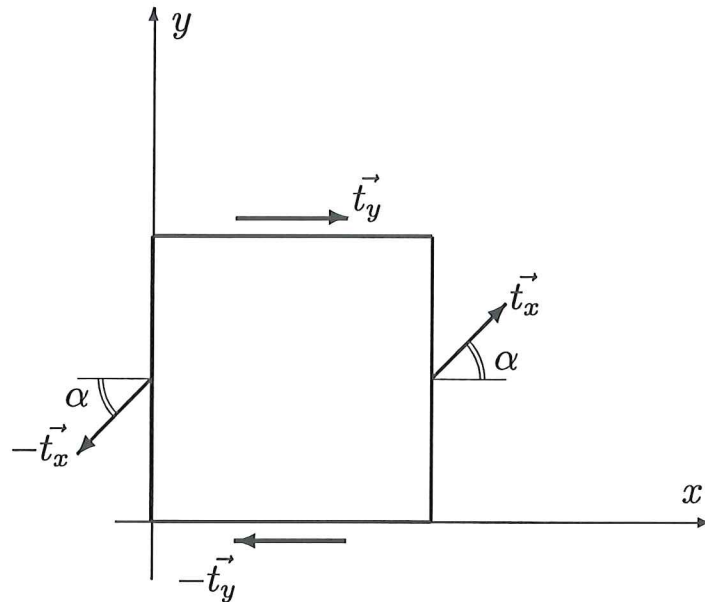
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= 4pb; & M_A (\curvearrowright) &= 4pb^2; & H_C (\Rightarrow) &= 0; & M_C (\curvearrowright) &= 0; \\
 N_{AB} &= \uparrow; & T_{AB} &= 4pb - 2qz_1; & M_{AB} &= -4pb^2 + 4pbz_1 - qz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= //; & M_{BC} &= //; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0)=0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=2b)=v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2'(z_2=3b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{2pb^2}{6E} z_1^2 - \frac{2pb}{3E} z_1^3 + \frac{q}{12E} z_1^4; & v_1'(z_1) &= \frac{4pb^2}{E} z_1 - \frac{2pb}{E} z_1^2 + \frac{q}{3E} z_1^3; \\
 v_2(z_2) &= \frac{pb^4}{6E}; & v_2'(z_2) &= 0; \\
 v_C &= \frac{qb^4}{6E} (\downarrow); & \varphi_B^{(1)} &= \frac{8pb^3}{3E} (\pi);
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = 210^\circ$  (sicché  $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$ ;  $\sin \alpha = -1/2$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 80$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

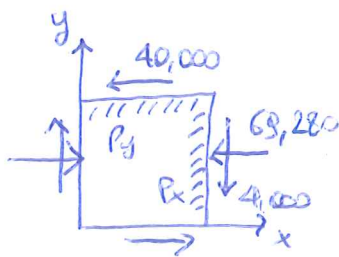
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = -68,282 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -40,000 \text{ (MPa)};$$

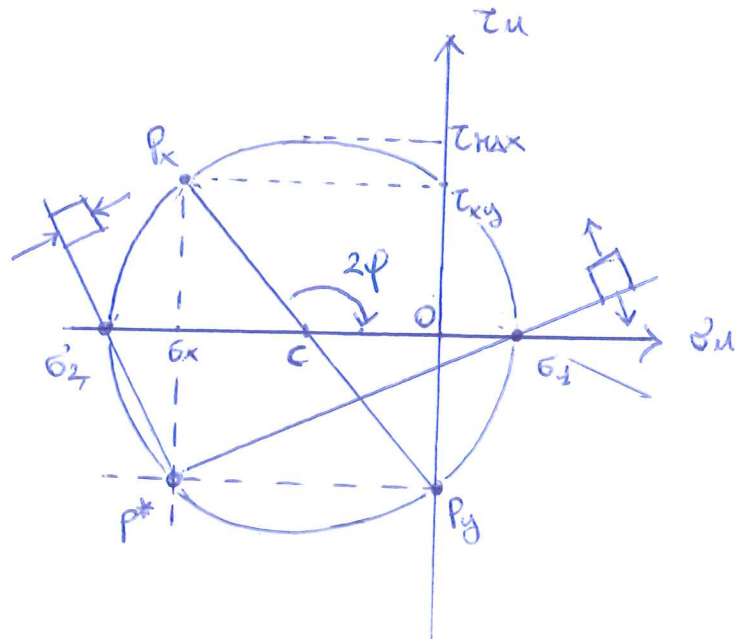
$$\sigma_1 = 18,274 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -87,556 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 52,915 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

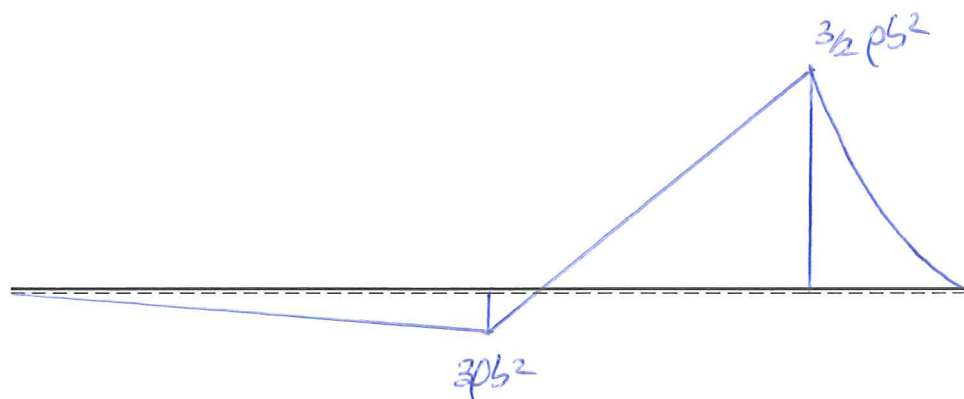
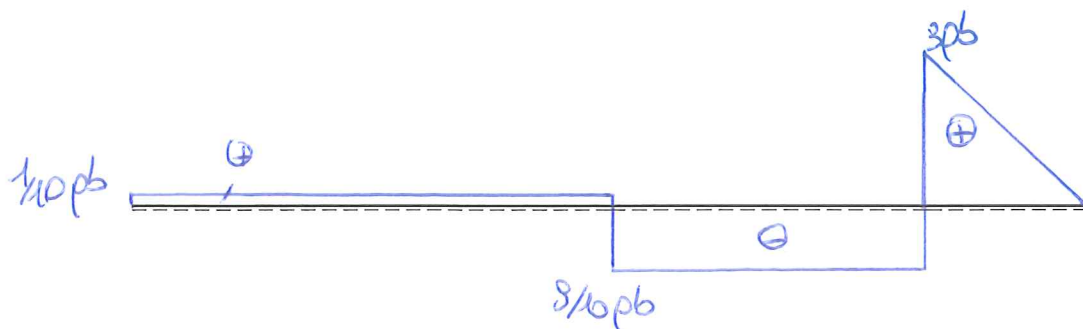
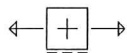
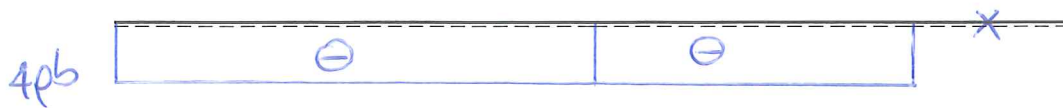


$$P_x = (-68,282; 40,000)$$

$$P_y = (0,000; -40,000)$$



$$\varphi = -77,723 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 V_A(\uparrow) &= \frac{1}{10} pb; V_B(\uparrow) = -pb; H_C(\rightarrow) = -4pb; V_C(\uparrow) = \frac{38}{10} pb; M_B(\curvearrowright) = \frac{3}{10} pb^2; \\
 N_{AB} &= -4pb; T_{AB} = \frac{1}{10} pb; M_{AB} = \frac{1}{10} pb \times 1; \\
 N_{BC} &= -4pb; T_{BC} = -\frac{8}{10} pb; M_{BC} = \frac{3}{10} pb^2 - \frac{8}{10} pb \times 2; \\
 N_{DC} &= //; T_{DC} = 3p \times 3; M_{DC} = -\frac{3}{2} p \times 3^2; \\
 \varphi_A &= -\frac{3pb^3}{20} \quad (2)
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 21.10.2022

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $B$ ,  $M_B$ .

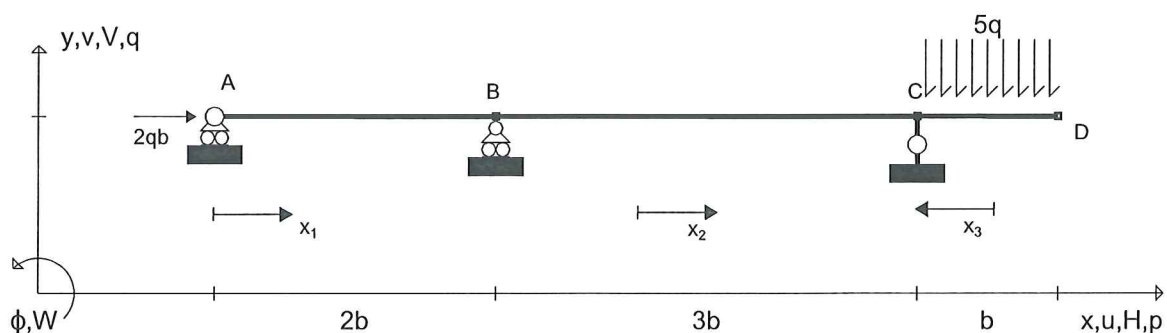
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto  $A$ ,  $\varphi_A$ .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Università' di Cagliari

SdC\_SdA 21.10.22\*002



EQ. DI CONGUENZA

$$\Delta\varphi_B = 0$$



## Esercizio n. 2 (7 punti)

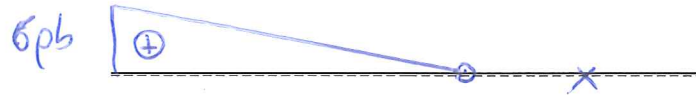
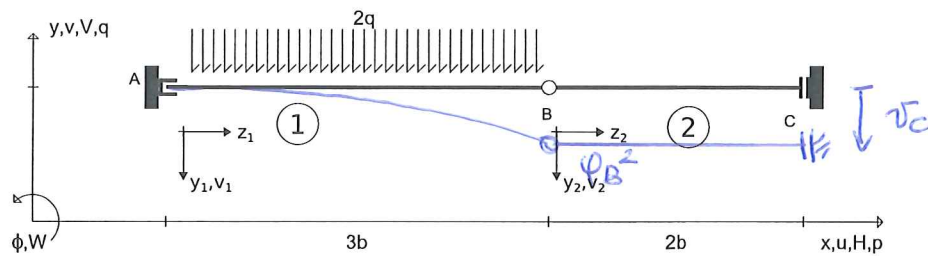
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

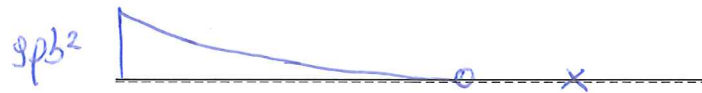
1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. La rotazione del punto B relativa al secondo corpo,  $\varphi_B^{(2)}$ ;
4. Lo spostamento verticale del punto C,  $v_C$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 21.10.22\*002



$\uparrow (+) \downarrow$



$\circ (+) \circ$

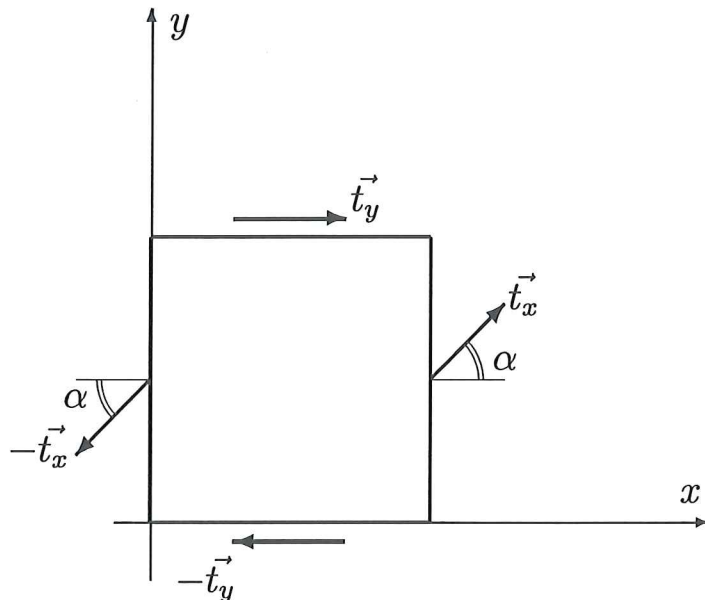
$V_A (\uparrow) = 6pb$	$M_A (\curvearrowright) = 3pb^2$	$H_C (\Rightarrow) = 0$	$M_C (\curvearrowright) = 0$
$N_{AB} = 0$	$T_{AB} = 6pb - 2pz_1$	$M_{AB} = -3pb^2 + 6pbz_1 - pz_1^2$	
$N_{BC} = 0$	$T_{BC} = 0$	$M_{BC} = 0$	
c.c in A = $v_1(z_1=0)=0; v_1'(z_1=0)=0$ ; c.c in B = $v_1(z_1=3b)=v_2(z_2=0)$			
c.c in C = $v_2(z_2=2b)=0$			
$v_1(z_1) = \frac{3pb^2}{6}z_1^2 - \frac{pb}{6}z_1^3 + \frac{p}{24}z_1^4$	$v_1'(z_1) = \frac{9pb^2}{6}z_1 - \frac{3pb}{24}z_1^2 + \frac{p}{36}z_1^3$		
$v_2(z_2) = \frac{81pb^4}{64}$	$v_2'(z_2) = 0$		
$v_C = \frac{81pb^4}{48}$ (↓)	$\varphi_B^{(2)} = 0$		

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = 150^\circ$  (sicché  $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$ ;  $\sin \alpha = 1/2$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 80$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

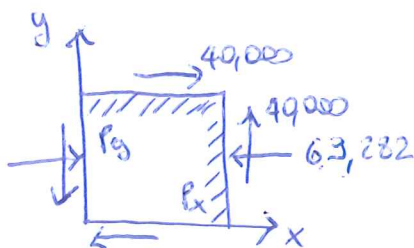
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = -68,282 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 40,000 \text{ (MPa)};$$

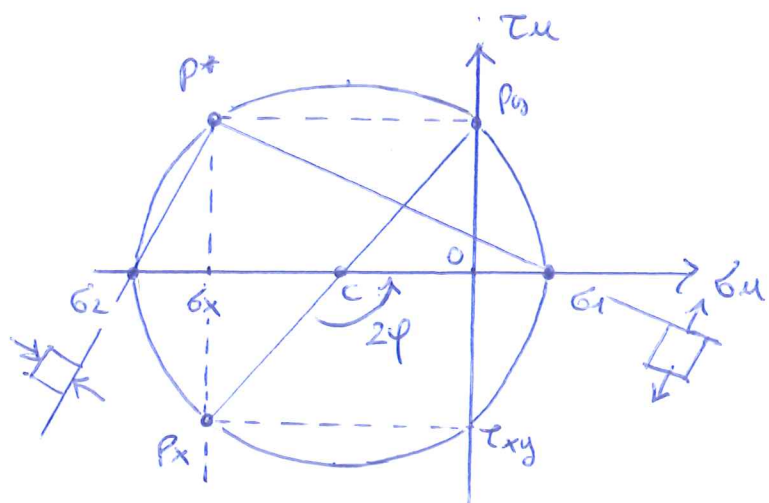
$$\sigma_1 = 18,474 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -87,556 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 52,915 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

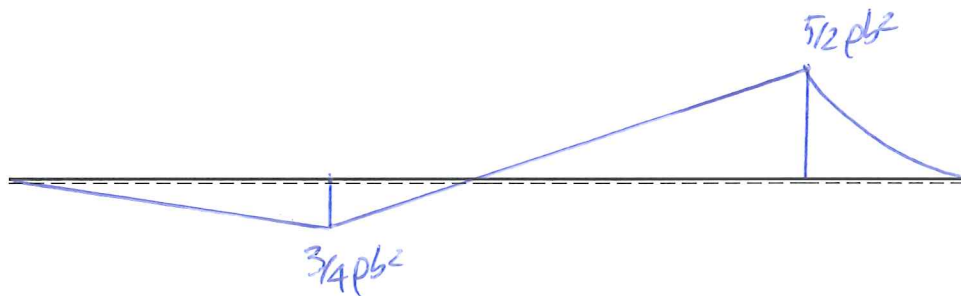
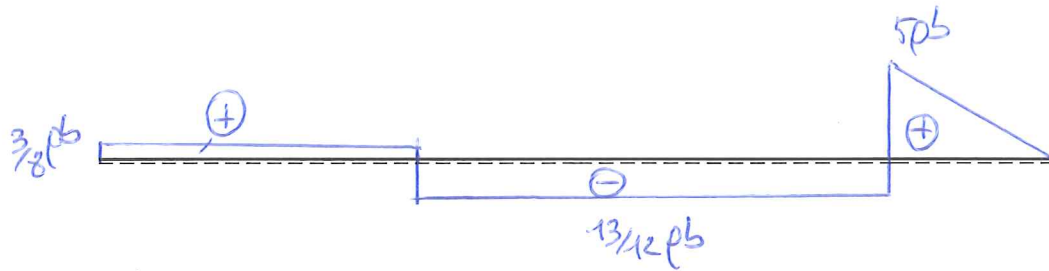
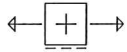
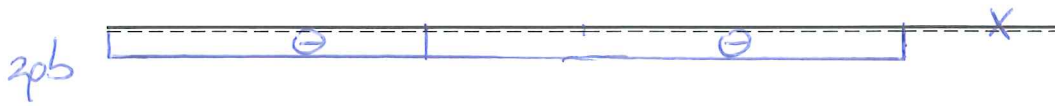


$$P_x = (-68,282; -40,000)$$

$$P_y = (0,000; +40,000)$$



$$\varphi = +77,723 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 V_A(\uparrow) &= \frac{3}{8}pb; & V_B(\uparrow) &= -\frac{35}{24}pb; & H_C(\Rightarrow) &= -2pb; & V_C(\uparrow) &= \frac{13}{12}pb; & M_B(\curvearrowright) &= \frac{3}{4}pb^2; \\
 N_{AB} &= -2pb; & T_{AB} &= \frac{3}{8}pb; & M_{AB} &= \frac{3}{8}pb \times 1; \\
 N_{BC} &= -2pb; & T_{BC} &= -\frac{13}{12}pb; & M_{BC} &= \frac{3}{4}pb^2 - \frac{13}{12}pb \times 2; \\
 N_{DC} &= //; & T_{DC} &= 5pb; & M_{DC} &= -\frac{5}{12}pb \times 3^2; \\
 \varphi_A &= \frac{-4b^3}{4EI} \quad (2)
 \end{aligned}$$